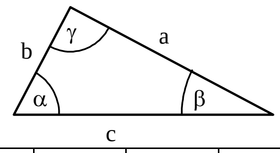
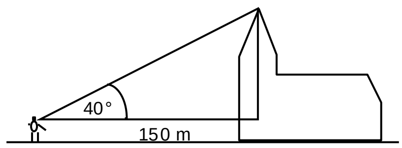
4.8. Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1: Dreiecksberechnung
Berechne die fehlenden Größen im rechtwinkligen Dreieck.
Alle Längen seien in cm angegeben.



Teil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
a	4		36	4,5		2,5	8,6	5	3.9	27,2	17,3	
b			13,20		7,2			2				
c		8,61		7,6			13,2		4.6			35,2
α	48°				54°						23°	
β		64°				56°				36°		53°

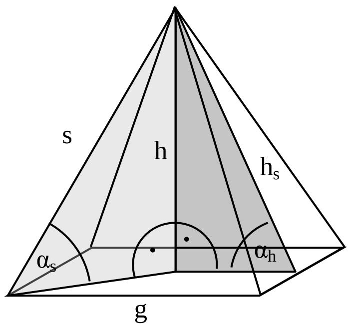
Aufgabe 2: Längenberechnungen



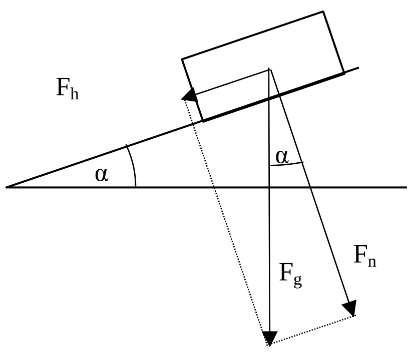
a) Wie hoch ist ein Kirchturm, dessen Spitze für einen Beobachter mit Augenhöhe 1,5 m aus einer Entfernung von 150 m unter einem Winkel von 40° erscheint?
b) Eine 7,5 m hohe Leiter lehnt in 6,6 m Höhe an der Wand. Wie groß ist der Anstellwinkel und wie weit steht sie von der Wand entfernt?
c) Ein Mast soll mit 20 m langen Seilen abgesichert werden. In welcher Höhe müssen sie am Mast angebracht werden, wenn ihr Neigungswinkel 65° sein soll? In welcher Entfernung zum Mast müssen sie am Boden befestigt werden?
d) Wie hoch ist eine Tanne, wenn ihr Schatten 27,5 m lang ist und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel 38,5° einfallen?
e) Wie weit fliegt ein Drachenflieger, der in 25 m Höhe unter einem Gleitwinkel von 8° startet?
f) Von der Spitze eines 28,6 m hohen Turmes erscheint die Breite des 6 m entfernten Flusses unter einem Sehwinkel von 17°. Wie breit ist der Fluss?
g) Für einen 12 m entfernten Beobachter mit der Augenhöhe 1,6 m erscheint der Fahnenmast auf der Spitze eines 15 m hohen Turmes unter dem Sehwinkel von 6,5°. Wie lang ist der Fahnenmast?

Aufgabe 3: Pyramiden
Berechne die fehlenden Größen. Alle Längen sind in cm angegeben.

Teil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
g	5			8				10	
s	4	6							9
h		4	4		5		5		
h_s			5			7			
α_s				70°			45°		60°
α_h					45°	60°		50°	



Aufgabe 4: Kräftezerlegung an der schiefen Ebene
Ein Junge der Masse m = 20 kg sitzt auf einer Rutsche mit dem Neigungswinkel α = 30°. Senkrecht nach unten wirkt auf ihn die Gewichtskraft $F_g = m \cdot g$ mit der Schwerebeschleunigung $g = 9{,}81\ m/s^2$. Berechne die Hangabtriebskraft F_h, die ihn in Rutschrichtung beschleunigt.



Aufgabe 5: Schnittwinkel von Geraden
Berechne die Schnittwinkel der folgenden Geraden

a) $g_1(x) = x - 1$ und $g_2(x) = \frac{1}{2}x + 1$
b) $g_1(x) = 2x - 3$ und $g_2(x) = x$
c) $g_1(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ und $g_2(x) = -2x + 4$
d) $g_1(x) = -x + 5$ und $g_2(x) = 3x - 2$

Aufgabe 6: Bogenmaß
Ergänze die folgende Tabelle:

Grad	0°		45°		90°		135°		180°		360°		57,29°	70°	
Bogenmaß		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{\pi}{9}$			2

Aufgabe 7: Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen
Bestimme die Winkelgeschwindigkeit ω, die Periode T, die Phase t_0 und die Ruhelage y_0 der folgenden Funktionen Skizziere jeweils die Schaubilder von f_1 - f_3 in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-4 \le t \le 4$

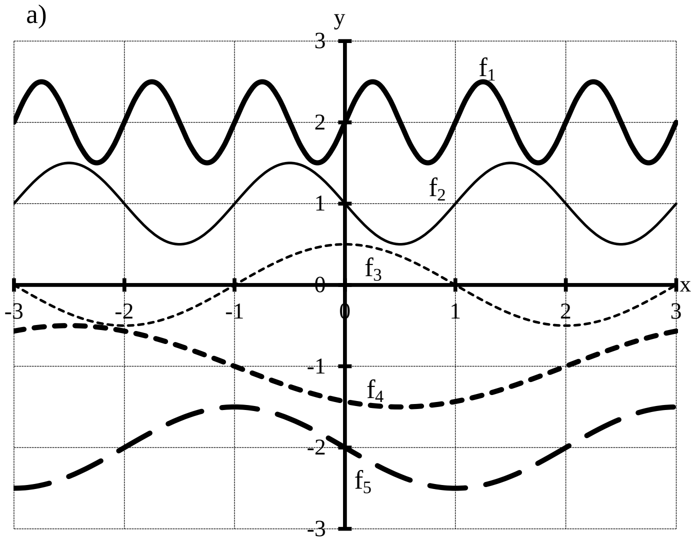
a) $f_1(t) = \sin[2\pi t]$
$f_2(t) = \sin[\pi t]$
$f_3(t) = \sin[\frac{\pi}{2} t]$

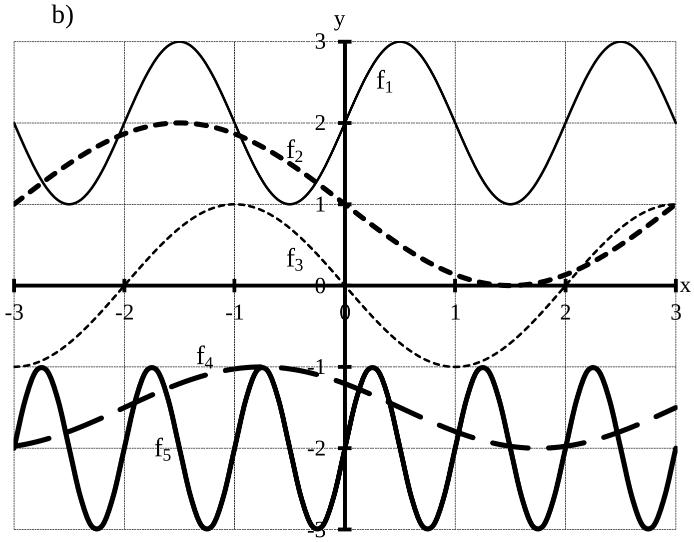
b) $f_1(t) = \frac{1}{2}\sin[2\pi t]$
$f_2(t) = 2\sin[\frac{\pi}{3} t]$
$f_3(t) = 3\sin[\frac{2\pi}{3} t]$

c) $f_1(t) = \sin[2\pi(t-1)] + 2$
$f_2(t) = \sin[\pi(t - \frac{1}{2})]$
$f_3(t) = \sin[\frac{\pi}{2}(t+1)] - 2$

d) $f_1(t) = \frac{3}{2}\sin[\frac{\pi}{3}(t-2)] + 2$
$f_2(t) = \frac{1}{2}\sin[\frac{2\pi}{3}(t-1)]$
$f_3(t) = \frac{3}{2}\sin[\pi(t+1)] - 2$

Aufgabe 8: Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen
Bestimme die Gleichungen der Funktionen f_1 - f_5:

a)


b)


Aufgabe 9: Sinussatz
Bestimme die restlichen Größen eines Dreiecks, wenn die folgenden Größen bekannt sind:
a) $a = 14{,}3$ m; $c = 27{,}9$ m und $\gamma = 82{,}1°$
b) $a = 13$ m; $b = 27$ m und $\alpha = 27°$

Aufgabe 10: Sinussatz
Zeige, dass die Winkelhalbierende in einem Dreieck stets die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Aufgabe 11: Sinussatz und Kosinussatz
Bestimme jeweils die fehlenden Größen im Dreieck ABC:
a) $\alpha = 30°, \beta = 60°$, $a = 3$ cm
b) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 40°$
c) $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm

Aufgabe 12: Kosinussatz
Um einem Felsen auszuweichen, geht ein Vermessungstrupp von einem Punkt A zunächst 85 m genau nach Norden bis B und von hier aus 102 m in Richtung Nord 52,2° Ost bis C. Wie weit sind A und C voneinander entfernt?

4.8. Lösungen zu den Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1: Dreiecksberechnung

Teil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
a	4	3,77	36	4,5	9,91	2,5	8,6	5	3,9	27,2	17,3	21,18
b	3,6	7,74	13,2	6,12	7,2	3,71	10,01	2	2,44	19,76	40,75	28,11
c	5,38	8,61	38,34	7,6	12,25	4,47	13,20	5,38	4,6	33,62	44,28	35,2
α	48°	26°	69,86	36,31°	54°	34°	40,66	68,20	57,98°	54°	23°	37°
β	42°	64°	20,13	53,69°	36°	56°	49,34	21,80	32,02°	36°	67°	53°

Beispielrechnung zu a):
$\beta = 90° - 48° = 42°$

$c = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{4\text{cm}}{0{,}74} \approx 5{,}38$ cm

$b = c\cdot\cos(\beta) = 5{,}38\text{ cm}\cdot 0{,}67 \approx 3{,}6$ cm

Aufgabe 2: Längenberechnung

a) Höhe $h = 1{,}5\text{ m} + 150\text{ m}\cdot\tan(40°) = 126{,}5$ m.

b) Anstellwinkel $\alpha = \sin^{-1}(\dfrac{6{,}6}{7{,}5}) \approx 61{,}64°$ und Entfernung $d \approx \sqrt{7{,}5^2 - 6{,}6} \approx 3{,}56$ m

c) Höhe $h = 20\text{ m}\cdot\sin(65°) \approx 18{,}12$ m und Entfernung $d = 20\text{ m}\cdot\cos(65°) \approx 8{,}45$ m

d) Höhe $h = 27{,}5\text{ m}\cdot\tan(38{,}5°) \approx 21{,}87$ m

e) Flugweite $s = \dfrac{25\text{ m}}{\tan(8°)} \approx 1777{,}88$ m

f) Das diesseitige Ufer erscheint unter dem Winkel von $\alpha_1 = \tan^{-1}(\dfrac{6\text{ m}}{28{,}6\text{ m}}) \approx 11{,}84°$ und ist $d_1 = 6$ m entfernt. Das jenseitige Ufer erscheint dann unter dem Winkel $\alpha_2 = 17° + 11{,}84° = 28.84°$ und ist $d_2 = 28{,}6\text{ m}\cdot\tan(28{,}84°) \approx 15{,}75$ m entfernt. Der Fluss ist also $d_2 - d_1 = 9{,}75$ m breit.

g) Das untere Ende der Fahnestange erscheint unter dem Winkel von $\alpha_1 = \tan^{-1}(\dfrac{13{,}4\text{ m}}{12\text{ m}}) \approx 48{,}15°$ und ist $h_1 = 13{,}4$ m über der Augenhöhe des Beobachters. Das obere Ende erscheint dann unter dem Winkel $\alpha_2 = 6{,}5° + 48{,}15° = 54{,}65°$ und ist $d_2 = 12\text{ m}\cdot\tan(54{,}65°) \approx 16{,}92$ m über der Augenhöhe des Beobachters. Die Fahnenstange ist also $h_2 - h_1 = 3{,}52$ m hoch

Aufgabe 3: Pyramiden

Teil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
g	5	6,32	6	8	10	7	7,07	10	6,36
s	4	6	5,83	16,53	8,66	7,83	7,07	9,25	9
h	1,87	4	4	15,54	5	6,06	5	5,96	7,79
h_s	3,12	5,10	5	16,05	7,07	7	6,12	7,78	8,42
α_s	27,87°	41,81°	43,32°	70°	35,37°	50,71°	45°	40,12°	60°
α_h	36,82°	51,66°	53,13°	75,52°	45°	60°	54,78°	50°	67,70°

Beispielrechnung zu a)

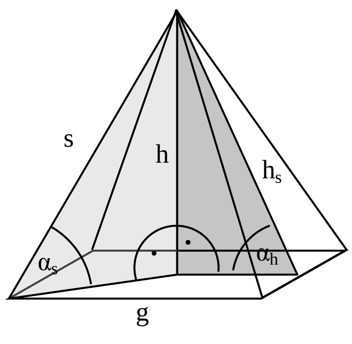
Grundflächendiagonale $d = \sqrt{g^2 + g^2} = \sqrt{2}\,g = \sqrt{2}\cdot 4 \approx 5{,}65$ cm (Grundfläche)

Höhe $h = \sqrt{s^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2} \approx \sqrt{4^2 - \left(\dfrac{5{,}65}{2}\right)^2} \approx 1{,}87$ cm (helles Dreieck)

Seitenhöhe $h_s = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{g}{2}\right)^2} \approx \sqrt{1{,}87^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} \approx 3{,}12$ cm (dunkles Dreieck)

Eckwinkel $\alpha_s = \sin^{-1}\left(\dfrac{h}{s}\right) \approx \sin^{-1}\left(\dfrac{1{,}87\text{ cm}}{4\text{ cm}}\right) \approx 27{,}87°$ (helles Dreieck)

Flächenwinkel $\alpha_h = \sin^{-1}\left(\dfrac{h}{h_s}\right) \approx \sin^{-1}\left(\dfrac{1{,}87\text{ cm}}{3{,}12\text{ cm}}\right) \approx 36{,}82°$ (dunkles Dreieck



Aufgabe 4: Kräftezerlegung an der schiefen Ebene

$F_h = F_g \cdot \sin(\alpha) = mg \cdot \sin(\alpha) = 98{,}1$ N (entspricht der Gewichtskraft von ca. 10 kg)

Aufgabe 5: Schnittwinkel von Geraden

a) $\alpha = 45° - 26{,}5° = 18{,}5°$

b) $\alpha = 63{,}43° - 45° = 18{,}43°$

c) $\alpha = -33{,}69° - (-63{,}43°) = 29{,}74°$

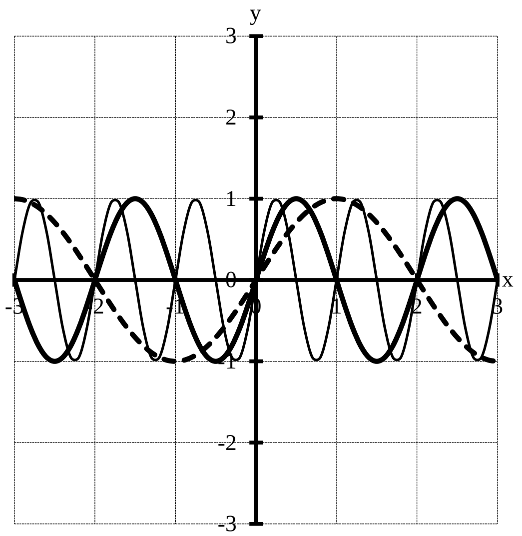
d) $\alpha = 71{,}57° - (-45°) = 116{,}57°$ bzw $63{,}43°$

Aufgabe 6: Bogenmaß

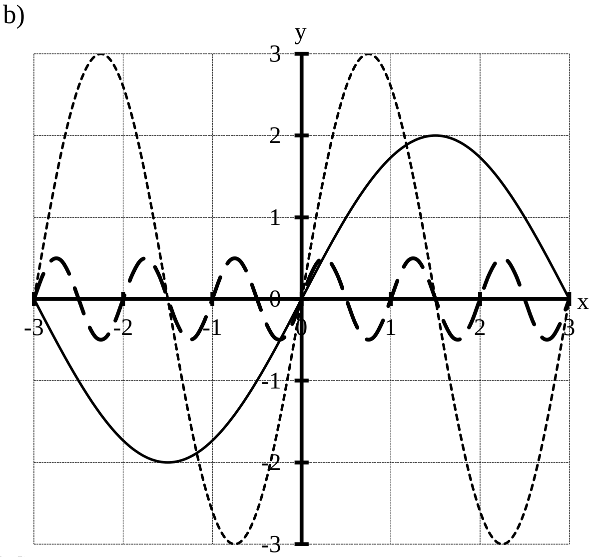
Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°	20°	57,29°	70°	114,59°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{9}$	1	$\frac{7\pi}{18}$	2

Aufgabe 7: Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen

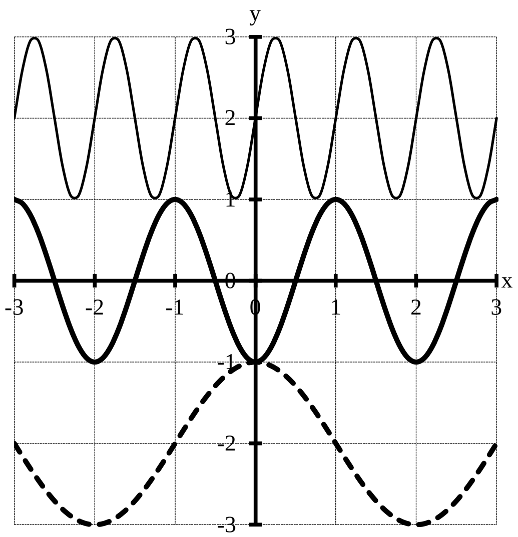
Teil a)



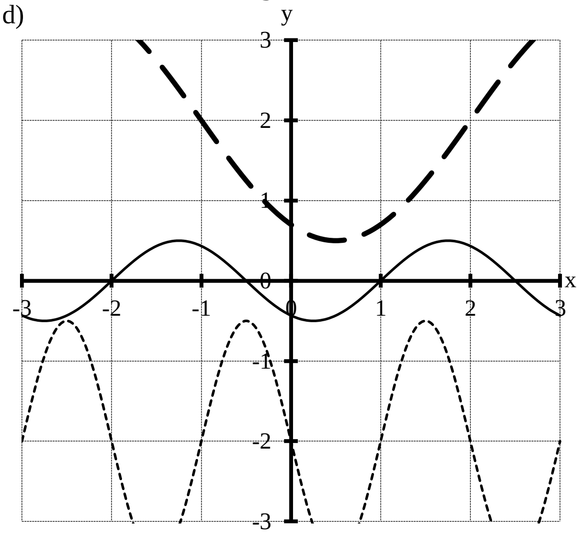
Teil b)



Teil c)



Teil d)



Aufgabe 8: Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen

a)

$f_1(t) = \frac{1}{2}\sin[2\pi t] + 2$

$f_2(t) = \frac{1}{2}\sin[\pi\,(t-1)] + 1$

$f_3(t) = \frac{1}{2}\sin[\frac{\pi}{2}(t+1]$

$f_4(t) = \frac{1}{2}\sin[\frac{\pi}{3}\,(t+2)] - 1$

$f_5(t) = \frac{1}{2}\sin[\frac{\pi}{2}\,(t-2)] - 2$

b)

$f_1(t) = \sin[\pi x] + 2$

$f_2(t) = \sin[\frac{\pi}{3}\,(t+3)] + 1$

$f_3(t) = \sin[\frac{\pi}{2}\,(t+2]$

$f_4(t) = \sin[\frac{2\pi}{5}(t+2)] - \frac{3}{2}$

$f_5(t) = \sin[2\pi t] - 2$

Aufgabe 9: Sinussatz

a) $\sin(\alpha) = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} = 0{,}51 \Rightarrow \alpha = 30{,}5°$ (Sinussatz)

$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 67{,}39°$ (Winkelsummensatz)

$b = a \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 26{,}00$ m (Sinussatz)

b) $\sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} = 0{,}94 \Rightarrow \beta = 70{,}54°$ (Sinussatz)

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 82{,}46°$ (Winkelsummensatz)

$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 28{,}38$ m (Sinussatz)

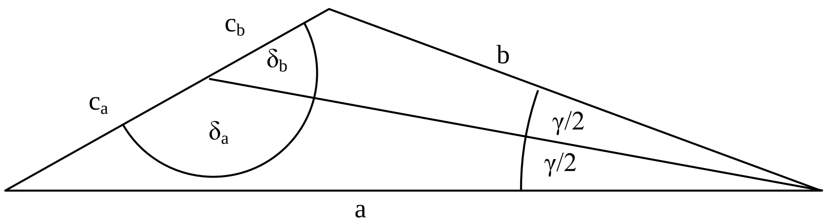
Aufgabe 10: Sinussatz

Im unteren Dreieck gilt $\frac{\sin(\delta_a)}{\sin(\gamma/2)} = \frac{a}{c_a}$

Im oberen Dreieck gilt $\frac{\sin(\delta_b)}{\sin(\gamma/2)} = \frac{b}{c_b}$

Wegen $\delta_a + \delta_b = 180°$ gilt aber
$\sin(\delta_a) = \sin(\delta_b)$ und damit folgt

$\frac{b}{c_b} = \frac{a}{c_a} \Leftrightarrow \frac{c_a}{c_b} = \frac{a}{b}$, qed.



Aufgabe 11: Sinussatz und Kosinussatz

a) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90°$ (Winkelsummensatz)

$b = a \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 5{,}2$ cm (Sinussatz)

$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 6$ cm (Sinussatz)

b) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\gamma)} = 3{,}9$ cm (Kosinussatz)

$\sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} = 0{,}66 \Rightarrow \beta = 41{,}24°$ (Sinussatz)

$\beta = 180° - \beta - \gamma = 98{,}76°$ (Winkelsummensatz)

Vorsicht bei dem **stumpfen** Winkel α: $\sin(\alpha) = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} = 0{,}99$ Der TR liefert zunächst den spitzen Nachbarwinkel $\sin^{-1}(0.99) = 180° - \alpha = 81{,}36°$!

c) $\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36{,}8°$ (Kosinussatz)

$\cos(\beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac} = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = 53{,}1°$ (Kosinussatz)

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90°$ (Winkelsummensatz)

Aufgabe 12: Kosinussatz

$\beta = 180° - 52{,}2° = 127{,}8°$ (Nachbarwinkel)

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\beta)} = 167{,}88$ m. (Kosinussatz)